Legendre:

$(1-x^2)y'' - 2xy' + p(p+1)y = 0 \quad , p \in \mathbb{R} \qquad x_0 = 0$

Λυση

-1 και 1 κανονικό ανώμαλο σημειο

Το 0 είναι ομαλό

Απο, γνωστή μέθοδο θα βρούμε:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{p(p-2)\cdots(p-2n+2)(p+1)(p+3)\cdots(p+2n-1)}{(2n)!} x^n$$

$$y_2(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(p-1)\cdots(p-2n+1)(p+2)\cdots(p+2n)}{(2n+1)!} x^{n+1} \quad , |x| < 1$$

(Οταν $p \in \mathbb{N}$ υπαρχει ενας αναδρομικος τυπος που μας δινει τη σχεση των δεικτών

$$(m+1)P_{m+1} = (2m+1)P_m - mP_{m-1}.$$

Hermite: $y'' - 2xy' + 2my = 0$

Λυση

$H_0(x) = 1$ και $H_1(x) = 2x$ και $H_3(x) = 4x^2$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot H_m(x) H_n(x)\, dx = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot H_m^2(x)\, dx = 2^m m \sqrt{\pi}$$

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ:

$F(x, y, z, z_x, z_y) = 0$

O : τοπος του $\mathbb{R}^2$ και $S \subseteq \mathbb{R}^2$

ΛΥΣΗ $\rightarrow$ $z : O_1 \rightarrow \mathbb{R}$: $C^1(O_1)$

- **Γραμμική (μερική) ΔΕ:**
  $A(x,y)\, z_x + B(x,y)\, z + C(x,y)\, z = \phi(x,y)$

- **Σχεδόν γραμμική (μερική) Δ.Ε:**
  $A(x,y)\, z_x + B(x,y)\, z_y = R(x,y,z)$

- **ΗΜΙΓΡΑΜΜΙΚΗ (μερική) Δ.Ε:**
  $P(x,y,z) z_x + Q(x,y,z) z_y = R(x,y,z)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

$z_x + z = x \cdot y, \ \forall x \in \mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y) = 1 \neq 0 \\ B(x,y) = 0 \\ C(x,y) = 1 \\ \phi(x,y) = x \cdot y \end{array}\right| \in C(\mathbb{R}^2)$$

όπως και στις συνήθεις γραμμικές Δ.Ε α' τάξης έχουμε

$$z(x,y) = e^{-\int_0^x 1\, ds} \left[z(0,y) + \int_0^x s \cdot y \cdot e^{\int_0^s 1\, dt}\, ds \right]$$

Στη μορφή:

$$a z_\xi + c z = \varphi$$

$a(\xi,\eta) \neq 0 \ \ \forall (\xi,\eta) \in \underline{O}$

$a, c, \varphi : \in C(\underline{O})$

Είναι

$$z_\xi + \frac{c}{a} z = \frac{\varphi}{a} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{c(s,\eta)}{a(s,\eta)} ds} z(\xi,\eta)\right) = \frac{\varphi(\xi,\eta)}{a(\xi,\eta)} e^{\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{c(s,\eta)}{a(s,\eta)} ds}$$

$$\Rightarrow e^{\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{c(s,\eta)}{a(s,\eta)} ds} z(\xi,\eta) - \cancelto{1}{e^{\int_{\xi_0}^{\xi_0} \frac{c(s,\eta)}{a(s,\eta)} ds}} z(\xi_0,\eta) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\varphi(t,\eta)}{a(t,\eta)} \cdot e^{\int_{\xi_0}^{t} \frac{c(s,\eta)}{a(s,\eta)} ds}$$

$$\Rightarrow z(\xi,\eta) = e^{-\int_{\xi_0}^{\xi} \frac{c(s,\eta)}{a(s,\eta)} ds} \left(z(\xi_0,\eta) + \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{\varphi(t,\eta)}{a(t,\eta)} \cdot e^{\int_{\xi_0}^{t} \frac{c(s,\eta)}{a(s,\eta)} ds} dt \right)$$

Άσκηση 13 (1ii)

$$z_x - (x-y) z = x^2 \cdot y, \quad x>0, \quad y \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

$$z(x,y) = e^{-\int_1^x -(s-y) ds} \left[z(1,y) + \int_1^x t^2 \cdot y \cdot e^{\int_1^t -(s-y) ds} dt \right] =$$

$$= e^{\int_1^x (s-y) ds} \left[z(1,y) + y \int_1^x t^2 \cdot e^{\int_1^t (y-s) ds} dt \right] =$$

$$= e^{\left[\frac{s^2}{2} - ys\right]_1^x} \cdot \left[z(1,y) + y \int_1^x t^2 \cdot e^{\left[ys - \frac{s^2}{2}\right]_1^t} dt \right] =$$

$$= e^{(x^2/2 - yx) - (\frac{1}{2} - y)} \cdot \left[z(1,y) + y \int_1^x t^2 \cdot e^{(yt - \frac{t^2}{2}) - (y - \frac{1}{2})} dt \right] =$$

$= \ldots$

$$A z_x + B z_y + C z = 0 \quad \text{ομογενής}$$

$A(x,y) \neq 0 \quad \forall (x,y) \in \underline{O}$

$\xi = x$

$\eta = w(x,y)$

$$\cdot\ z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$z_x = z_\xi + z_\eta \cdot w_x$$

$$\cdot\ z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$z_y = z_\eta \cdot w_y$$

Ταυτόσυν,

$$A z_\xi + A z_\eta \cdot w_x + B z_\eta w_y + C z = 0$$

$$A z_\xi + z_\eta (A w_x + B w_y) + C z = 0$$

$$w(x,y) = d$$

$$w_x dx + w_y dy = 0 \Rightarrow \frac{w_x}{w_y} = -\frac{B}{A} = \frac{w_x}{w_y} = -\frac{dy}{dx} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{B}{A} = \frac{dy}{dx}} \quad (1)$$

Επιλύοντας την (1) έχουμε:

$$w(x,y) = d \rightsquigarrow \eta = \dots$$

Παράδειγμα 2:

$$k z_x + \lambda z_y + \mu z = 0 \quad , \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad k \neq 0$$

Λύση

Θεωρώ $\xi = x$ | $\frac{dy}{dx} = \frac{k}{\lambda} \Rightarrow k\,dy = \lambda\,dx \Rightarrow ky - \lambda x = 0$

$$\eta = w(x,y) = ky - \lambda x$$

$$z_x = z_\xi \frac{\partial \xi}{\partial x} + z_\eta \frac{\partial \eta}{\partial x} \Rightarrow z_x = z_\xi - \lambda z_\eta$$

$$z_y = z_\xi \frac{\partial \xi}{\partial y} + z_\eta \frac{\partial \eta}{\partial y} \Rightarrow z_y = z_\eta \cdot k$$

Άρα, $k(z_\xi - \lambda z_\eta) + \lambda z_\eta \cdot k + \mu z = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow k z_\xi + \mu z = 0 \Rightarrow z_\xi + \frac{\mu}{k} z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z(\xi, \eta) = z(0,\eta) \cdot e^{-\int_0^\xi \frac{\mu}{k} s\, ds} = z(0,\eta)\, e^{-\frac{\mu}{k}\xi}$$

Συνεπώς,

$$z(x,y) = \overbrace{z(0, ky - \lambda x)}^{F(ky-\lambda x)}\, e^{-\frac{\mu}{k}x}$$

Ασκηση 2 σελ. 406

$\underline{O} = \mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \geq 0\}$

$$z(x,y) = \begin{cases} x^2 & , x>0, y>0 \\ 0 & , (x,y) \in \underline{O} - \{(x,y) : x>0, y>0\} \end{cases}$$

$z \cdot y = 0$

ΛΥΣΗ

Εξετάζουμε ως προς τη μερική διαφορισιμότητα

$$\lim_{h \to 0} \frac{z(0,y) - (h,y)}{h} \quad \text{και} \quad \lim_{h \to 0} \frac{z(x,0) - (x,h)}{h}$$

. . . . . .

Ασκηση 3

$z(x,y) = xy + f(x^2+y^2)$ f C^1

ΝΔΟ είναι λύση της:

$y z_x - x z_y = y^2 - x^2$, $x>0$

ΛΥΣΗ

$z_x = y + f'(x^2+y^2) \cdot 2x$

$z_y = x + f'(x^2+y^2)\, 2y$

Ασκηση 4

$z_y = \sin x - \cos y$, $x, y \in \mathbb{R}$

Ασκηση 7 και 8 στο σπίτι